62.03 Física II A / 62.04 Física II B / 82.02 Física II

Departamento de Física

.UBAfiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

El trabajo de las fuerzas eléctricas.
La circulación del campo eléctrico.
El teorema de Stokes.
(1.6 a 1.9 del apunte)

Trabajando en electrostática… ¿que quiere decir?

que se cumple la Ley de Coulomb.

Interacciones eléctricas en el vacío y cargas no aceleradas.

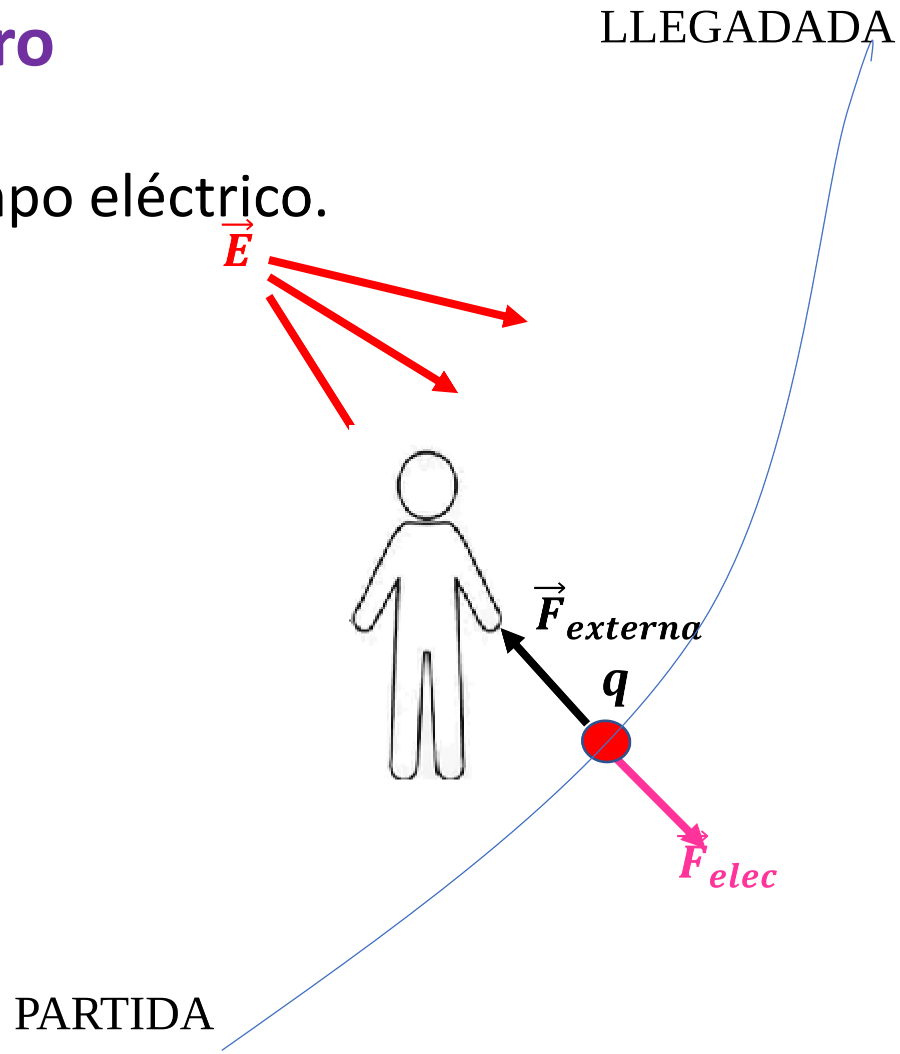
Fuerza total sobre la carga debe ser cero

Una persona sostiene una carga de prueba inmersa en un campo eléctrico.
La persona hace fuerza para mantener quieta a la carga.

$$\vec{F}_{eléctrica} + \vec{F}_{mano} \approx 0$$

Ahora la persona mueve a la carga de prueba a lo largo de la curva azul. Lo hace muy lentamente, con velocidad casi nula.

La carga se desplaza en forma cuasiestacionaria…
pasando por sucesivos estados de equilibrio

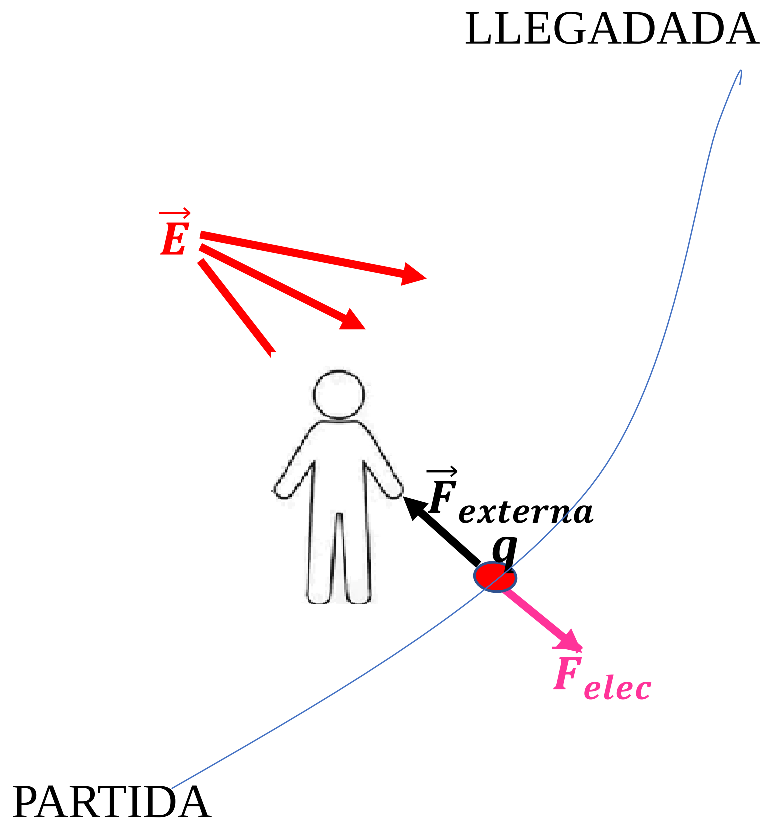


Ignorando la fuerza de gravedad, en este desplazamiento de cuasi equilibrio, sobre la carga de prueba actúa:

a)la fuerza eléctrica

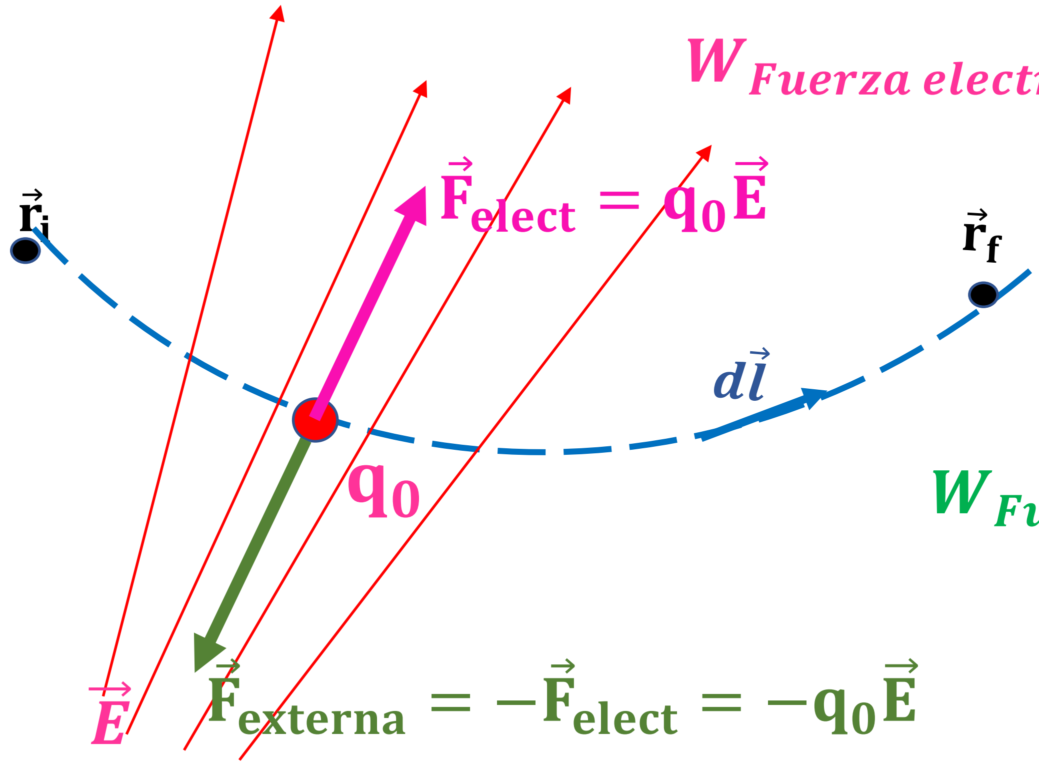
y

b) La fuerza mecánica ejercida por la mano de la persona.



$$\vec{F}_{eléctrica} + \vec{F}_{externa} = q_0\vec{E} + \vec{F}_{externa} \approx 0$$
$$\vec{F}_{externa} \approx -q_0\vec{E}$$

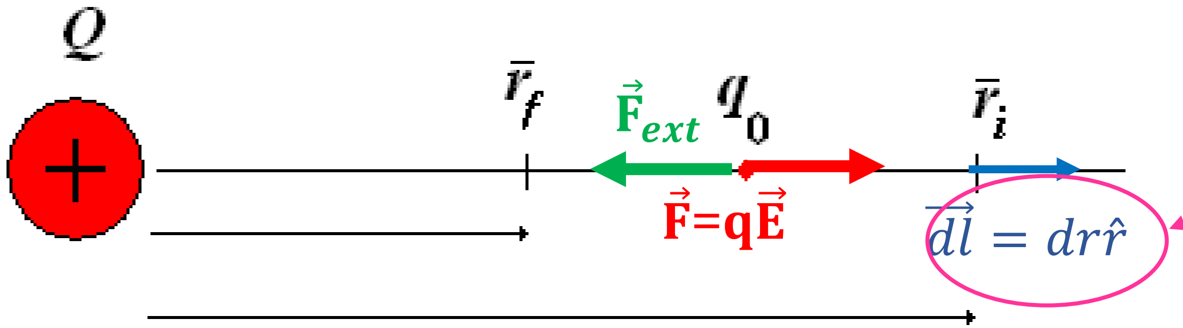
¿Cuánto trabajo hace la fuerza externa para mover a q_0 a lo largo de la curva C azul?



$$W_{Fuerza\ electrostática_{i\to f}} = \int_i^f \vec{F}_{electrostatica} \cdot d\vec{l} = \int_i^f q_0\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{Fuerza\ externa_{i\to f}} = \int_i^f \vec{F}_{externa} \cdot d\vec{l} = -\int_i^f q_0\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{Fuerza\ externa_{i\to f}} = -\int_i^f \vec{F}_{electrostatica} \cdot d\vec{l} = -W_{Fuerza\ electrostática_{i\to f}}$$



Aunque la distancia disminuye NO ponemos un signo menos delante de *dr*; los límites de la integral se encargan de poner el sentido correcto del vector desplazamiento.

$$W_{Fuerza\ externa_{i\to f}} = \int_i^f \vec{F}_{externa}\cdot d\vec{l} = -\int_i^f q_0\vec{E}\,.\,d\vec{l}$$

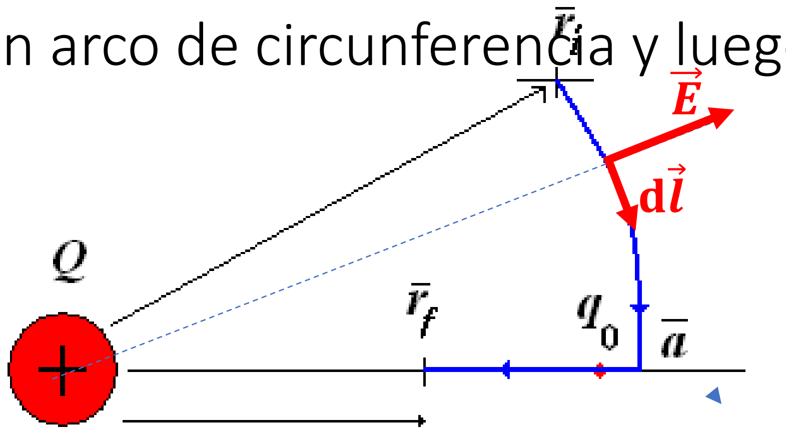
$$W_{\vec{r}_f,\vec{r}_i} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\hat{r}\,dr =$$

$$r_f < r_i \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} > o$$

$$\boxed{W_{\vec{r}_f,\vec{r}_i} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)}$$

El trabajo mecánico (el de la mano) es positivo Está bien porque nos cuesta acercarnos a *Q*.

Segundo ejemplo: Un camino más complicado, formado por: un arco de circunferencia y luego una radial,



$$W_{\vec{r}_f,\vec{r}_i} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\underbrace{\int_{\vec{r}_i}^{a} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}}_{=0} - \int_{a}^{\vec{r}_f} q_0\vec{E}\cdot d\,\vec{l}$$

$$= -q_0\int_a^{\vec{r}_f}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot dr\hat{r} = -q_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{\vec{r}_f}\frac{1}{r^2}\cdot dr$$

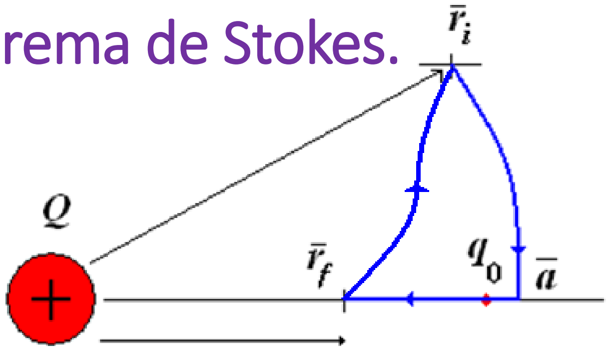
$$= -q_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^{r_f}$$

El trabajo en la primera parte es nulo porque las líneas de campo son ortogonales al vector tangente.

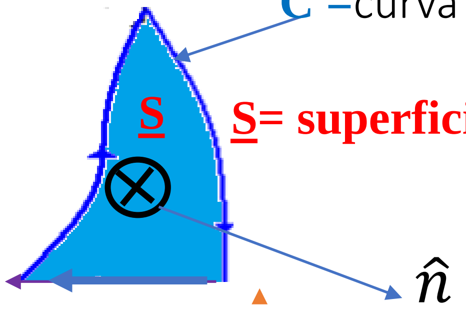
$$W_{externa_{\vec{r}_f,\vec{r}_i}} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)$$

Conclusión: El trabajo realizado es el mismo que antes

Tercer ejemplo: camino cerrado. Teorema de Stokes.



C =curva cerrada



S= superficie encerrada por C

$$\oint_C \vec{F}.\,d\vec{l} = \iint_S rot(\vec{F}).d\vec{s} =$$

$$-\iint_S q_0\, rot(\vec{E}).d\vec{s} = -q_0\iint_S rot(\vec{E}).d\vec{s}$$

¿?

La normal de S (regla de la mano derecha)a *definido por el sentido de circulación de C*

Aplicamos el teorema de Stokes al campo eléctrico generado por una carga puntual. Dada la forma funcional nos conviene usar un sistema esférico.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$E_\varphi = 0$$

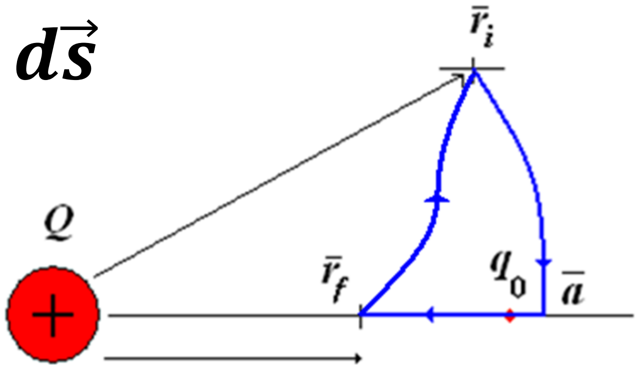
$$E_\theta = 0$$

$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = \frac{1}{r\sin(\varphi)}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin(\varphi)\,E_\theta) - \frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial E_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)\right]\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right]\hat{\theta} = 0; \quad r \neq 0$$

$$\boxed{\mathrm{rot}(\vec{E}) = 0}$$

$$\oint_C \vec{F}_{externa}\cdot d\vec{l} = -\oint_C \vec{F}_{electrica}\cdot d\vec{l} = -q_0\iint_S rot(\vec{E}).d\vec{s} = 0$$

$$\oint_C \vec{F}_{electrica}\cdot d\vec{l} = 0$$



El trabajo hecho por las fuerzas eléctricas en cualquier camino cerrado es nulo

$$\oint_C \vec{F}_{electrica} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$ **Las fuerzas eléctrostáticas son conservativas**

¡Bravo! Podemos hacer trabajo contra fuerzas eléctricas y el trabajo queda guardado (como al levantar una piedra o al deformar un resorte).

$$\rightarrow \boxed{W_{f\ elec_{i\to f}} = -(U_f - U_f) = -\Delta U_E}$$

$$[U] = N\,m = joule = J$$

$$W_{\ felec_{i\to f}} = -\frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = -\Delta U_E$$

1. *U* es siempre definida respecto de un punto donde **U=0 arbitrario**
2. *¡ΔU!*
3. *U* es una propiedad compartida entre las 2 cargas - consecuencia de la interacción entre ellas.

$$\frac{\Delta U}{q_o} = -\frac{W_{i\to f}}{qo} = \boxed{-\int_i^f \vec{E}\,.\,d\vec{l}} = \boxed{\mathrm{V(f)} - \mathrm{V(i)}}$$

Variación de Energía electrostática por unidad de carga

La integral no depende del camino porque el campo electrostático es irrotacional

es el cambio de una función potencial *V* asociada al campo electrostático.

$$\mathbf{V(f)} - \mathbf{V(i)}$$

Diferencia de potencial electrostático entre el punto de *llegada* y el de *partida*

$$[V] = \frac{J}{C}$$

Al mover una carga de 1 C (desde un punto de partida a uno de llegada) realizamos un trabajo de 1 J , decimos que la diferencia de potencial entre esos puntos es de un Voltio (1 V)

La reacción química de una pila AA transporta cargas entre un borne y otro. El trabajo por unidad de carga transportada es de 1.5 V.

$$\mathbf{\Delta V} = \mathbf{V}(\vec{\boldsymbol{r}}_f) - \mathbf{V}(\vec{\boldsymbol{r}}_i) = -\int_{\vec{\boldsymbol{r}}_i}^{\vec{\boldsymbol{r}}_f} \vec{\boldsymbol{E}} \,.\, \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

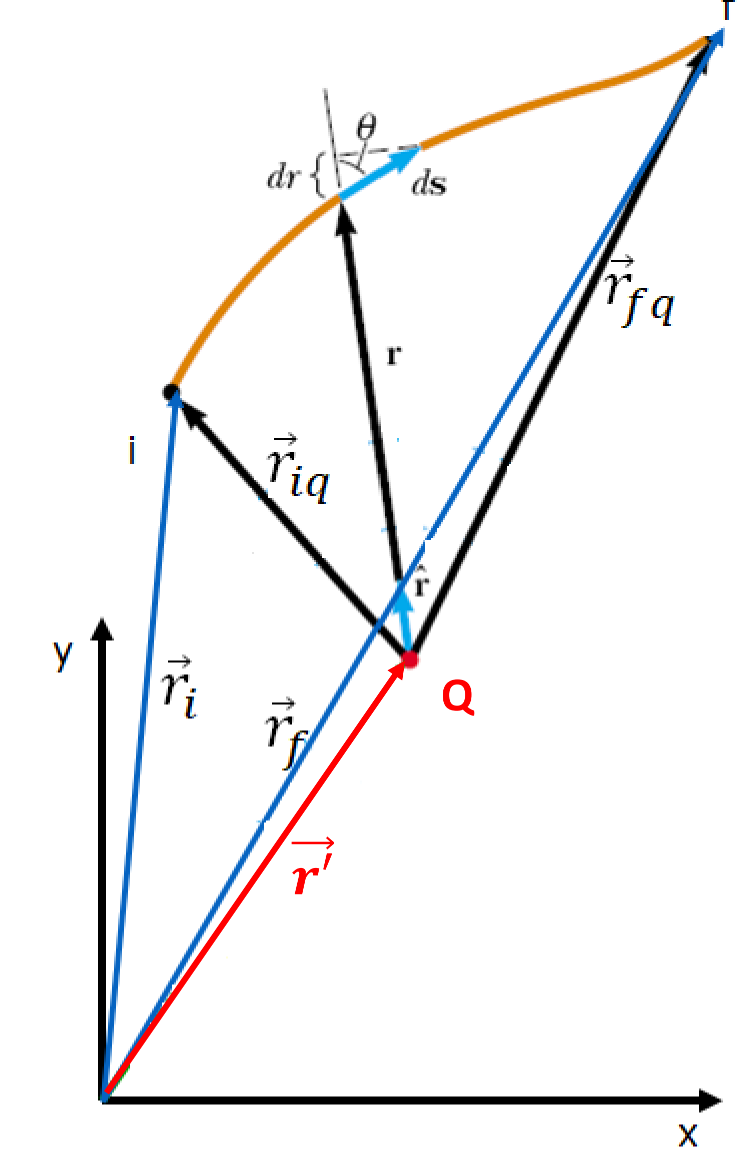
$$dV = -\vec{E}.d\vec{l}$$

Por la definición de función potencial tenemos:

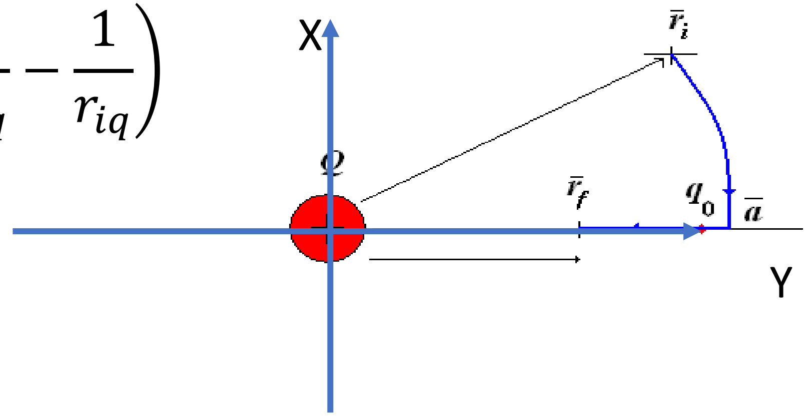
$$\vec{E} = -\mathbf{grad}(V)$$

El signo menos viene de cómo hemos definido el trabajo.

Para un dado campo electrostático hay infinitas funciones potencial que difieren en una constante aditiva. La constante no es importante porque al calcular el gradiente desaparece, así como cuando calculamos el trabajo realizado para mover una carga entre dos puntos.



$$V(f) - V(i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{fq}} - \frac{1}{r_{iq}}\right)$$



$$\vec{r}_{iq} = \vec{r}_i - \vec{r'}$$

$$\vec{r}_{fq} = \vec{r}_f - \vec{r'}$$

$$\boxed{\Delta V = V(f) - V(i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r'}|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}\right)}$$

Punto fuente

Punto campo

$$V(\vec{r}_i = \infty) = 0$$

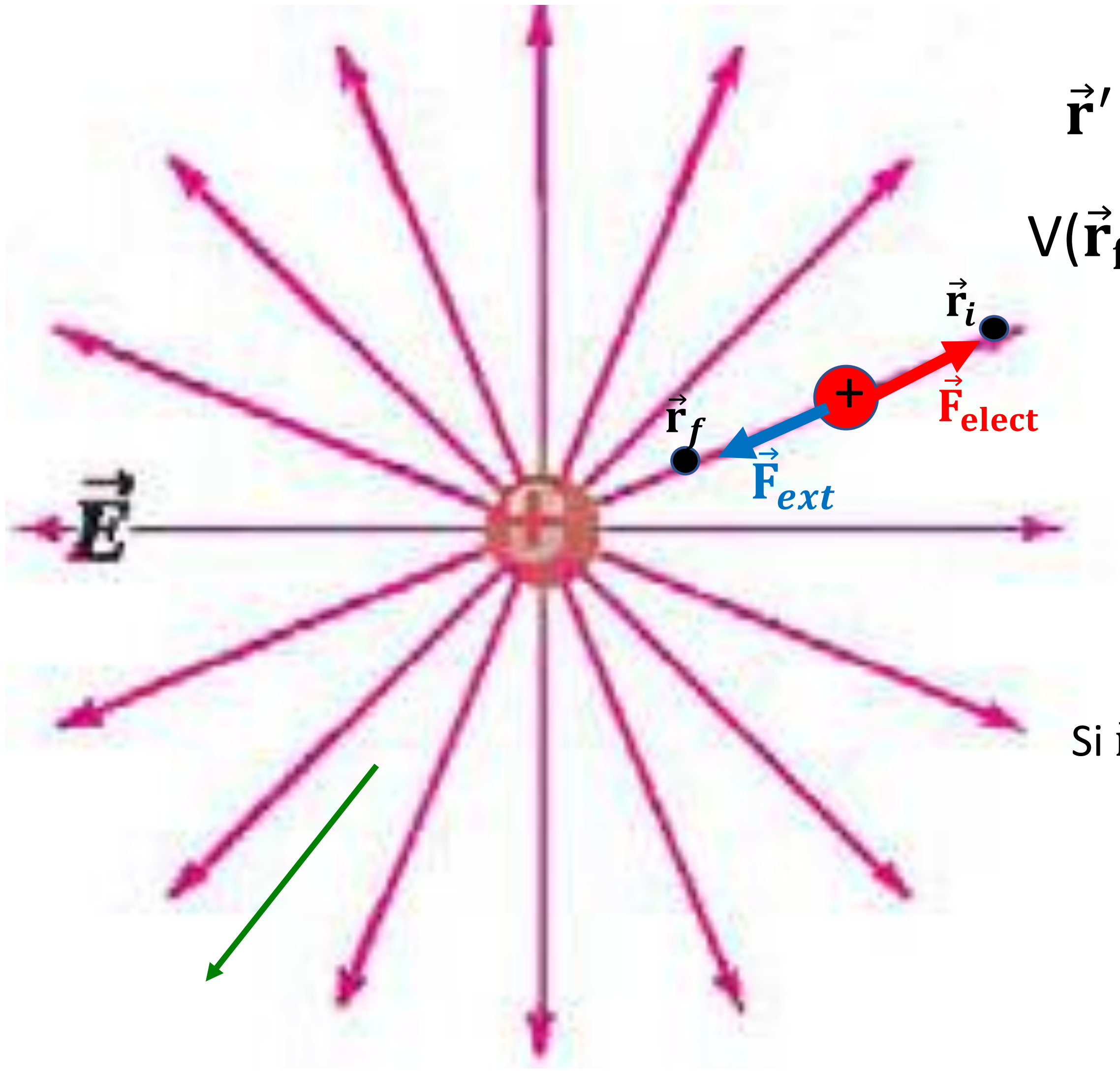
Si no existe ***Q*** en el infinito

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + cte}$$

$$\Delta V = V(f) - V(i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}\right)$$

Diferencia de Potencial generad por campo o por una carga puntual ubicado en el punto de coordenadas $\vec{r}\,'$



$$\vec{\mathbf{r}}' = 0$$

$$V(\vec{\mathbf{r}}_f) - V(\vec{\mathbf{r}}_i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = \frac{W_{externa_{i\to f}}}{q_0} = -\frac{W_{elect_{i\to f}}}{q_0}$$

$$W_{externa_{i\to f}} > 0$$

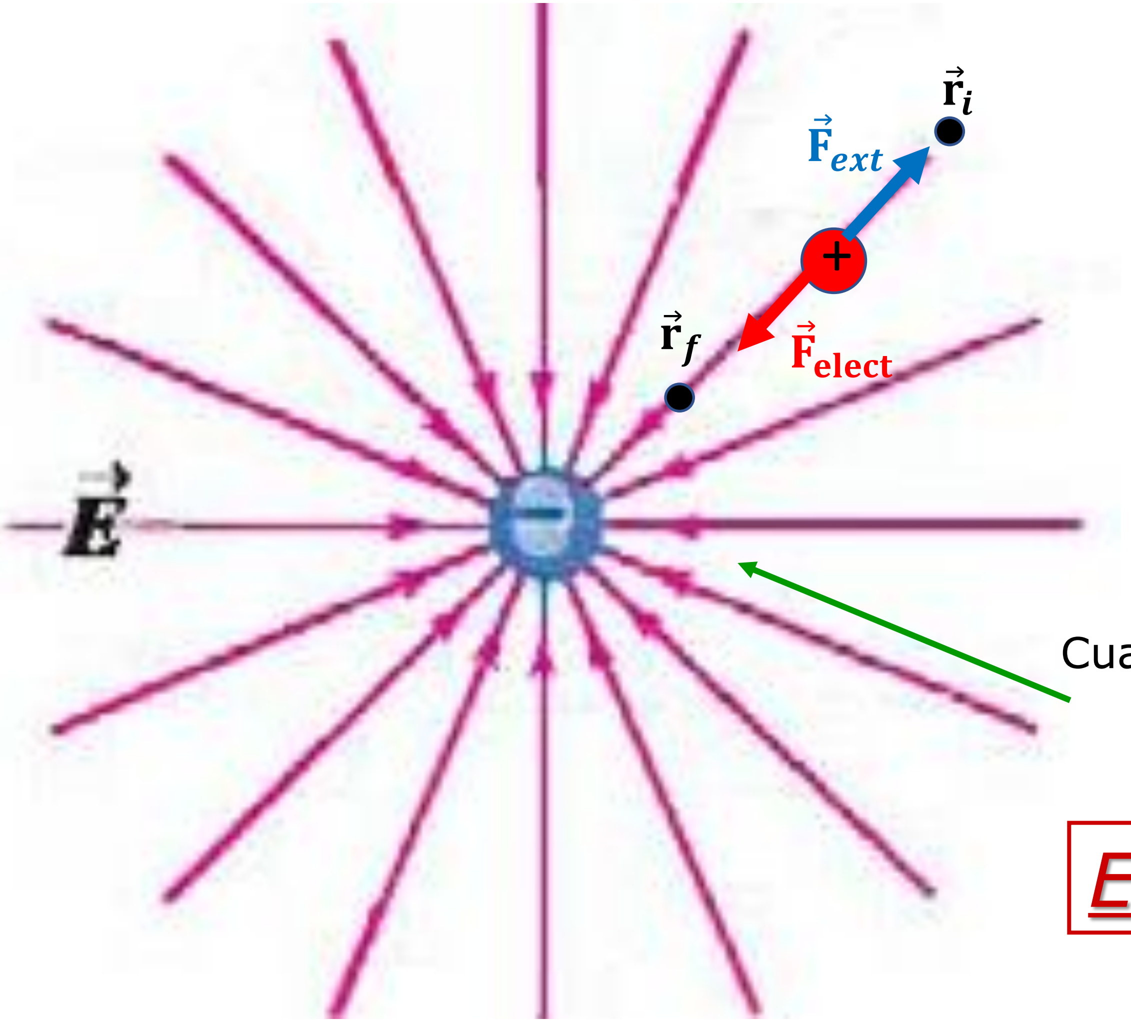
$$W_{electr_{i\to f}} < 0$$

Si $\vec{\mathbf{r}}_i = \infty$, el potencial no diverge, entonces defino $V(\vec{\mathbf{r}}_{i=\infty}) = \mathbf{0}$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right) > 0 \quad \forall r$$

Cuando r aumenta V disminuye

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = -\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = \frac{W_{externa_{i\to f}}}{q_0} = -\frac{W_{elect_{i\to f}}}{q_0}$$



$W_{externa_{i\to f}} < 0$ $\quad$ $W_{electr_{i\to f}} > 0$

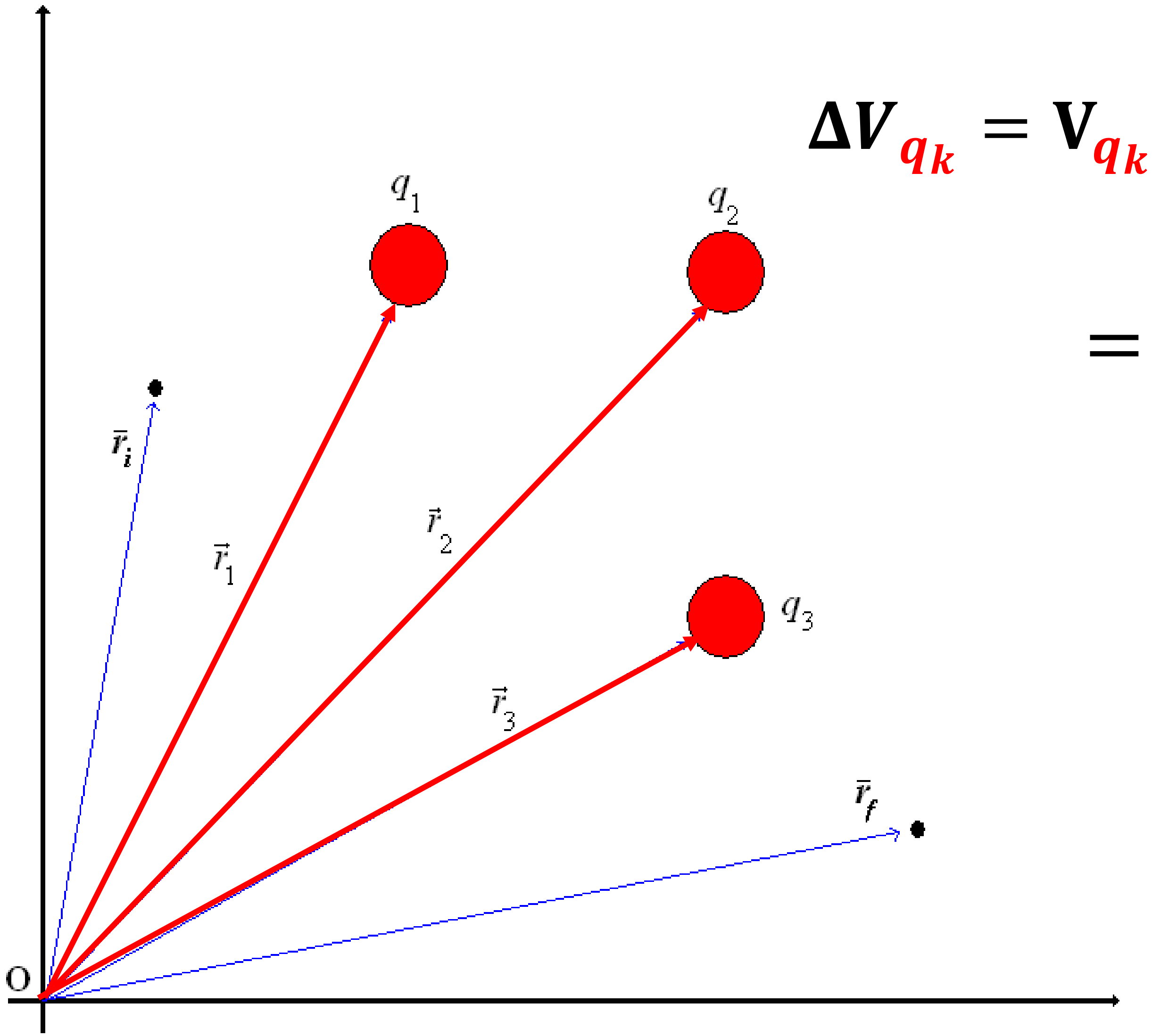
Si $\vec{r}_i = \infty$, el potencial no diverge, entonces defino $V(\vec{r}_{i=\infty}) = 0$

$$V(\vec{r}) = -\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right) < 0$$

Cuando r disminuye V disminuye

***E* apunta hacia donde *V* disminuye**

Ahora con varias cargas puntuales



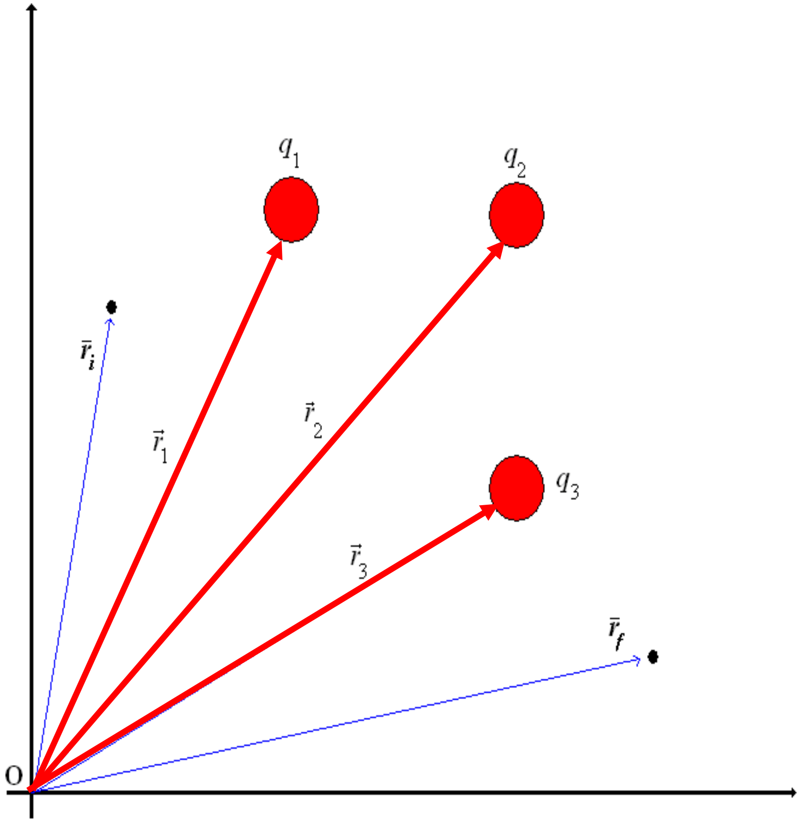
$$\boldsymbol{\Delta V_{q_k} = \mathbf{V}_{q_k}(\mathbf{f}) - \mathbf{V}_{q_k}(\mathbf{i}) =}$$

$$= \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \vec{r'}_{q_k}\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r'}_{q_k}\right|}\right)$$

Posición inicial

Posición de la carga q_k

Posición final



$$\left[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)\right]_{q_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \overrightarrow{r'}_1\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \overrightarrow{r'}_1\right|}\right]$$

$$\left[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)\right]_{q_2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \overrightarrow{r'}_2\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \overrightarrow{r'}_2\right|}\right]$$

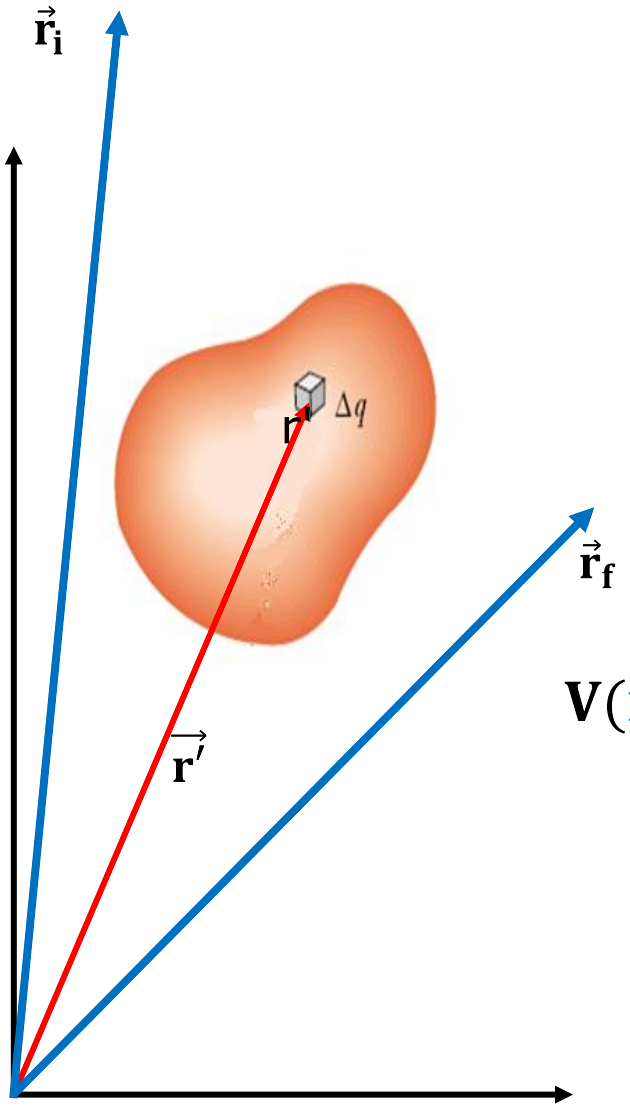
$$\left[V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)\right]_{q_3} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \overrightarrow{r'}_3\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}'_3\right|}\right]$$

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q_k\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \overrightarrow{r'}_k\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \overrightarrow{r'}_k\right|}\right]$$

Se suma sobre las cargas y sus posiciones $\vec{r}'_K$, y no sobre $\vec{r}_f$ y $\vec{r}_i$ que son posiciones fijas

Ahora con una distribución continua

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q_k \left[\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \vec{r'}_k\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r'}_k\right|}\right]$$



$$\boxed{\Delta V = V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int \frac{dq(\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}\right)}$$

$$dq = \rho \; dVol'$$

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho(x',y',z').}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} dx'dy'dz' - \int \frac{\rho(x',y',z')}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|} dx'dy'dz'\right]$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho(x',y',z').}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . dx'dy'dz'\right] + cte}$$

Repaso clase anterior

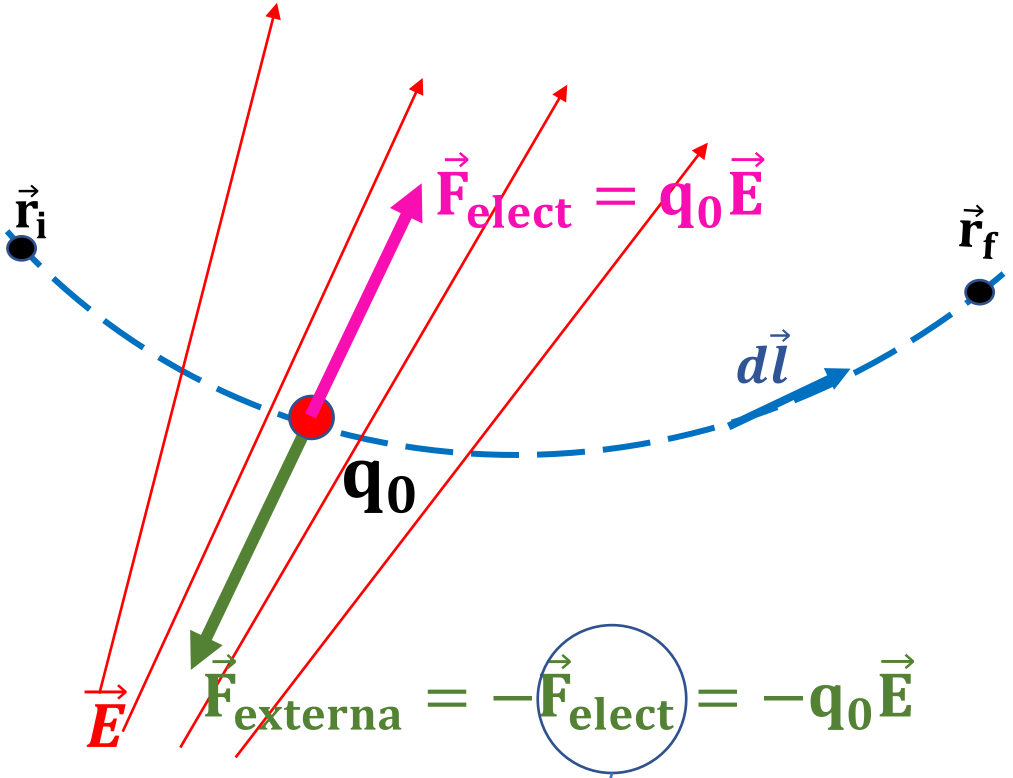
Ignorando la fuerza de gravedad, en este desplazamiento de cuasi equilibrio, sobre la carga de prueba actúa:

a)la fuerza eléctrica

y

b) La fuerza mecánica ejercida por la mano de la persona.

$$\vec{F}_{eléctrica} + \vec{F}_{externa} = +q_0\vec{E} + \vec{F}_{externa} \approx 0$$
$$\vec{F}_{externa} \approx -q_0\vec{E}$$



$$\mathbf{W}_{externa_{\vec{r}_{i\to}\vec{r}_i}} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\,\mathbf{W}_{elect_{\vec{r}_{i\to}\vec{r}_i}}$$

El trabajo hecho por las fuerzas electrostáticas en cualquier camino cerrado es nulo:
Solo depende de la posición inicial y Final

Las fuerzas electrostáticas son conservativas.

$$\boxed{W_{f\ elec_{i\to f}} = -(U_f - U_f) = -\Delta U}$$

1. U es siempre definida respecto de un punto donde U=0 arbitrario
2. ΔU
3. U es una propiedad compartida entre las 2 cargas - consecuencia de la interacción entre ellas.

$$\mathbf{W_{elect_{i\to f}}} = \int_{\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}}^{\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{f}} \mathbf{q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \mathbf{q_0} \int_{\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}}^{\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{f}} \mathbf{\vec{E} \cdot d\vec{l}} = -(U_f - U_i)$$

$$(V_f - V_i) = \frac{(U_f - U_i)}{q_0} = -\int_i^f \vec{E} \,.\, d\vec{l} = \frac{W_{externa_{i\to f}}}{qo} = -\frac{W_{electr_{i\to f}}}{qo}$$

$$[\mathrm{V}] = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{C}}$$

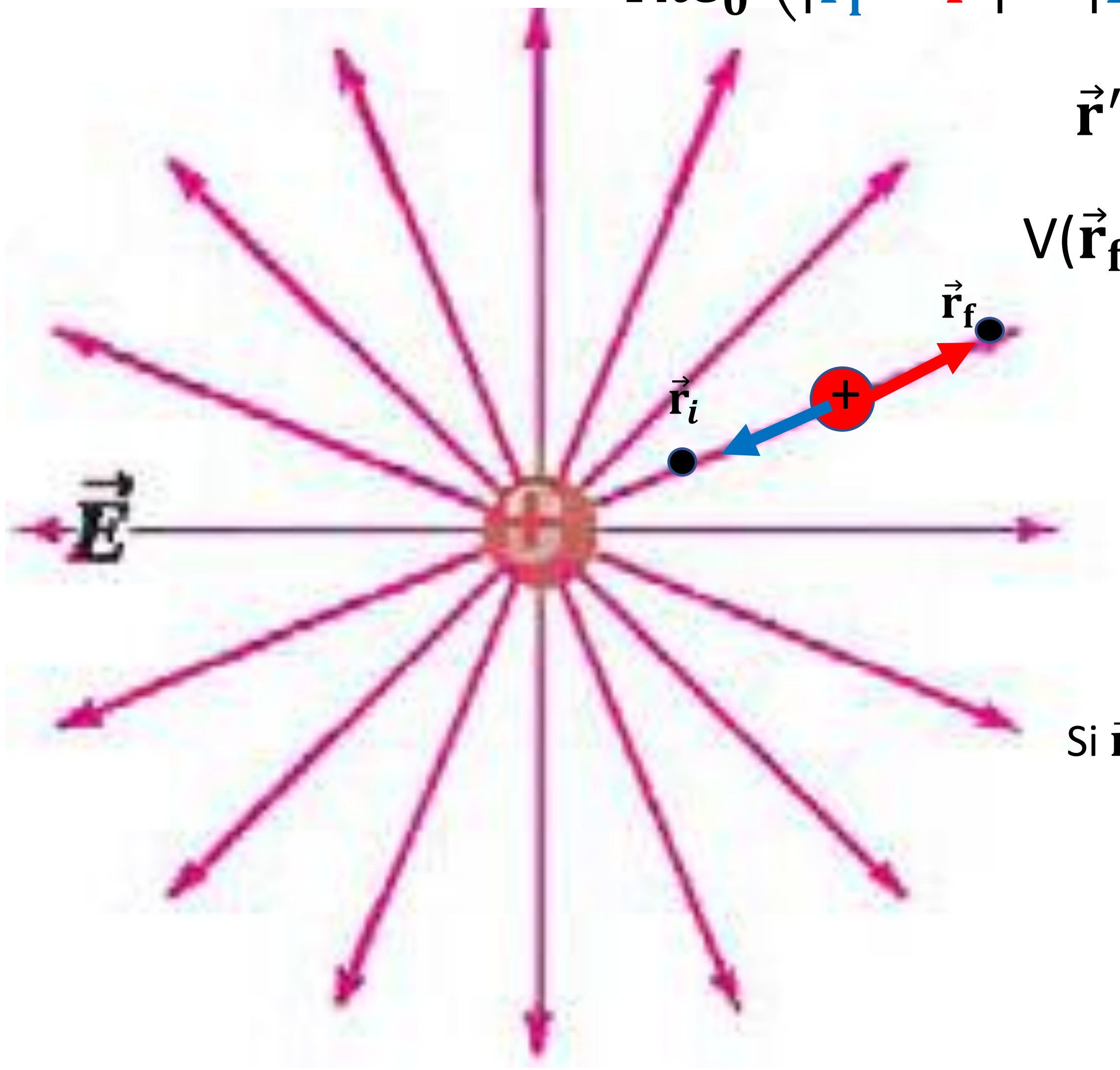
$$\vec{E} = -\mathrm{grad}(V)$$

$$\mathbf{W_{elect_{i\to f}}} = -\mathbf{Q}(V_f - V_i)$$

$$\mathbf{W}_{externa} = \mathbf{Q}(V_f - V_i)$$

$$\Delta V = V(f) - V(i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}\right)$$

la Diferencia de Potencial del campo generado por una carga puntual ubicado en el punto de coordenadas $\overrightarrow{r'}$



$$\vec{r}' = 0$$

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = \frac{W_{externa_{i\to f}}}{q_0} = -\frac{W_{elect_{i\to f}}}{q_0}$$

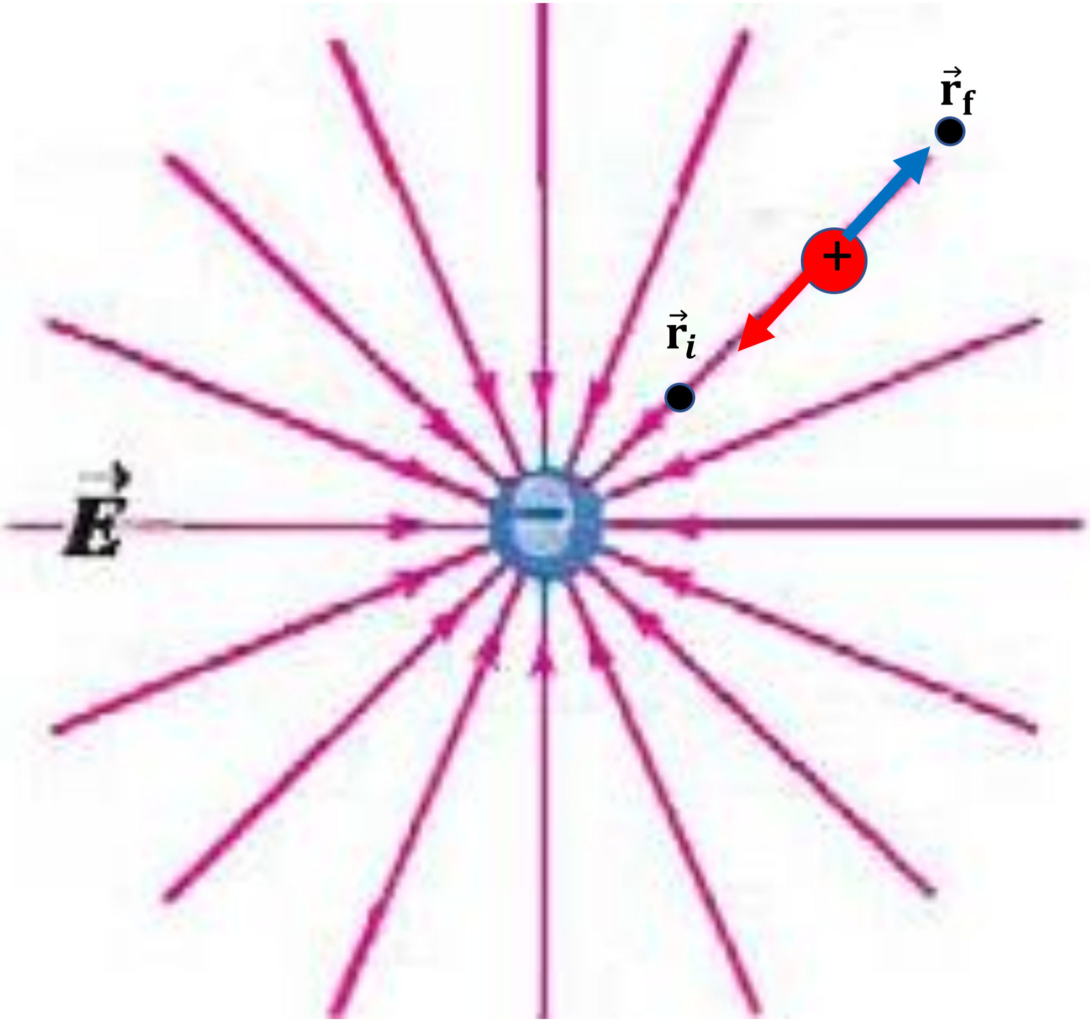
$$W_{externa_{i\to f}} > 0$$

$$W_{electr_{i\to f}} < 0$$

Si $\vec{r}_i = \infty$, el potencial no diverge, entonces defino $V(\vec{r}_{i=\infty}) = 0$

$$V(\vec{r}_f) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f}\right) > 0$$

$$V(\vec{\mathbf{r}}_f) - V(\vec{\mathbf{r}}_i) = -\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = \frac{W_{externa_{i\to f}}}{q_0} = -\frac{W_{elect_{i\to f}}}{q_0}$$



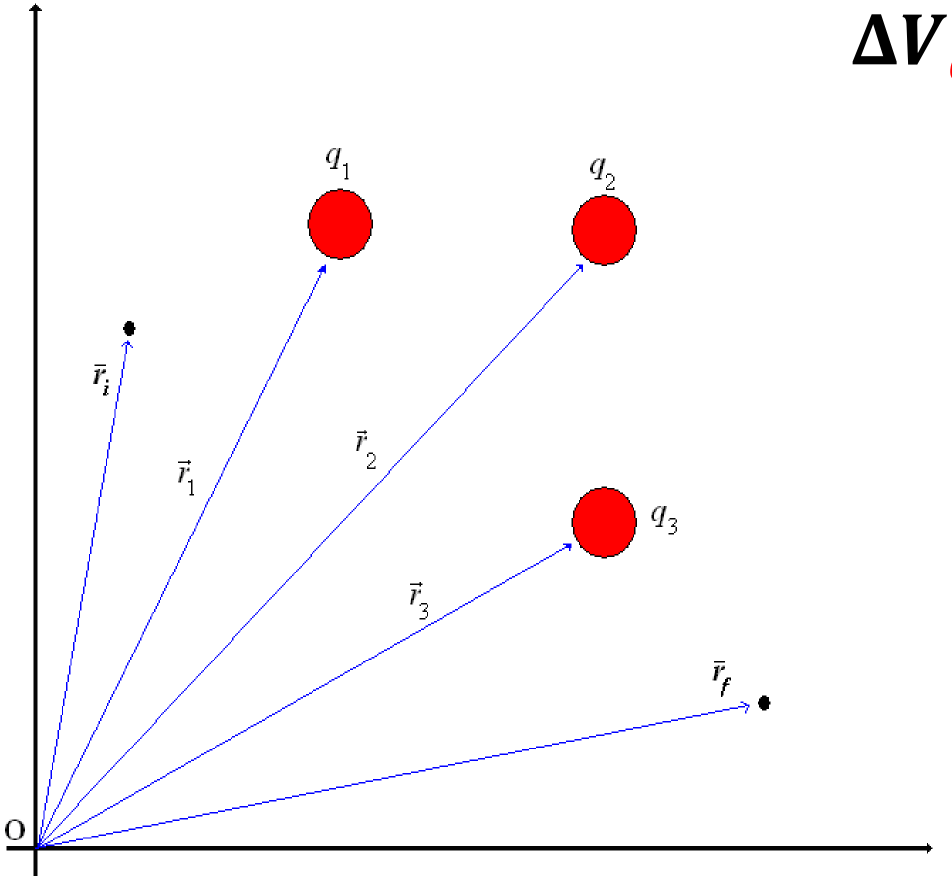
$$W_{externa_{i\to f}} < 0$$

$$W_{electr_{i\to f}} > 0$$

Si $\vec{\mathbf{r}}_i = \infty$, el potencial no diverge, entonces defino $V(\vec{\mathbf{r}}_{i=\infty}) = 0$

$$V(\vec{r}_f) = -\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f}\right) > 0$$

Ahora con varias cargas puntuales



$$\Delta V_{q_k} = \mathbf{V}_{q_k}(\mathbf{f}) - \mathbf{V}_{q_k}(\mathbf{i}) =$$

$$= \frac{\mathbf{q}_k}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{f} - \overrightarrow{r'}_{qk}|} - \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i} - \overrightarrow{r'}_{qk}|}\right)$$

Posición inicial

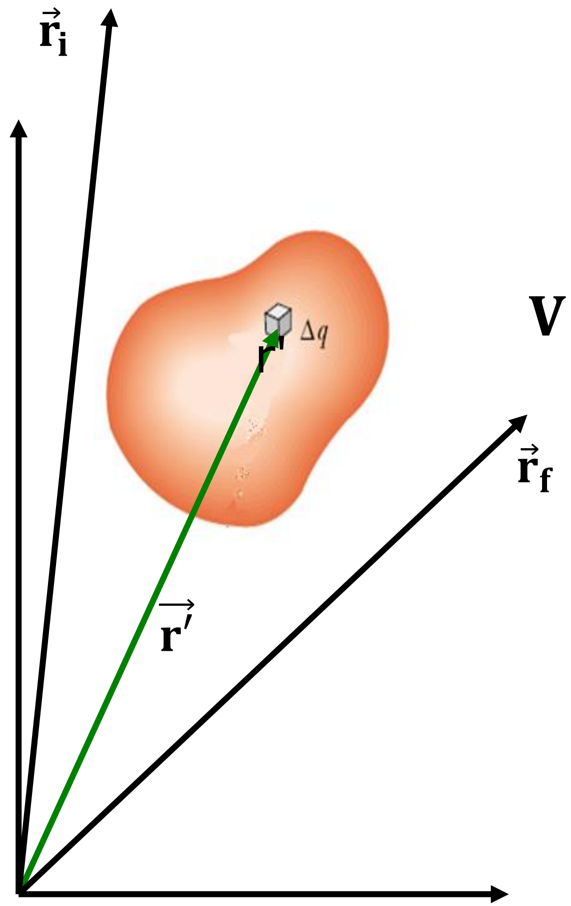
Posición de la carga q_k

Posición final

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q_k \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \overrightarrow{r'}_k|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \overrightarrow{r'}_k|}\right]$$

distribución continua

$$\Delta V = V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \int \frac{dq(\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}\right)$$



$$dq = \rho\ dVol'$$

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho(x', y', z').}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|}.dx'dy'dz' - \int \frac{\rho(x', y', z').}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}.dx'dy'dz'\right]$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\ dx'dy'dz'\right] + cte}$$

Se puede calcular la diferencia de potencial entre dos puntos:

1) usando el campo E

2)usando la formula de potencial

$$\Delta V = V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}\,.\,d\vec{l} = \int \frac{dq(\overrightarrow{r'})}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}'|}\right)$$

¿Cuál usamos? Depende del problema

1)Conocido E puedo hallar ΔV

$$\Delta V = V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}\,.\,d\vec{l}$$

2) Conocido V puedo hallar E

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}(V)$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}(V(x,y,z)) = -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} y + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\hat{z}\right)$$

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

1) Son curvas de nivel constante de las funciones potencial asociadas a un campo vectorial irrotacional.

Son curvas sobre las cuales V=cte

2) Si se desplaza una carga de prueba q_0 desde un punto a otro sobre una equipotencial, como V=cte

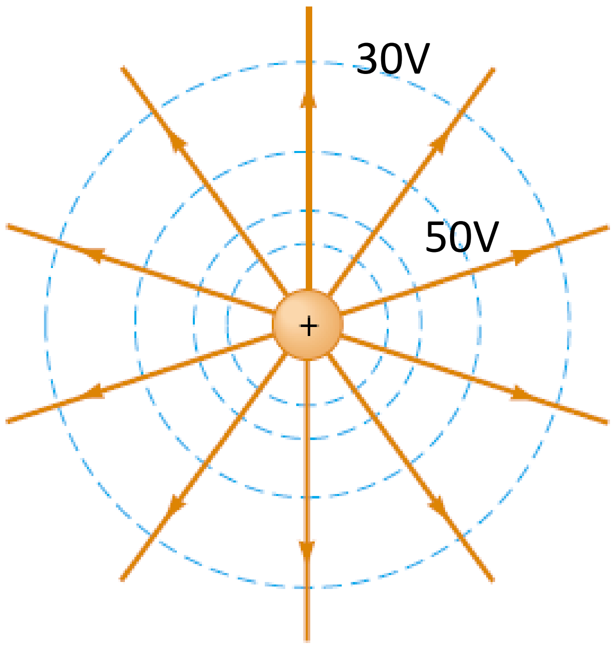
$$\mathbf{V}(\vec{r}_f) - \mathbf{V}(\vec{r}_i) = \mathbf{0} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}\,.\,d\vec{l} \longrightarrow \vec{E}.\,d\vec{l} = \mathbf{0}$$

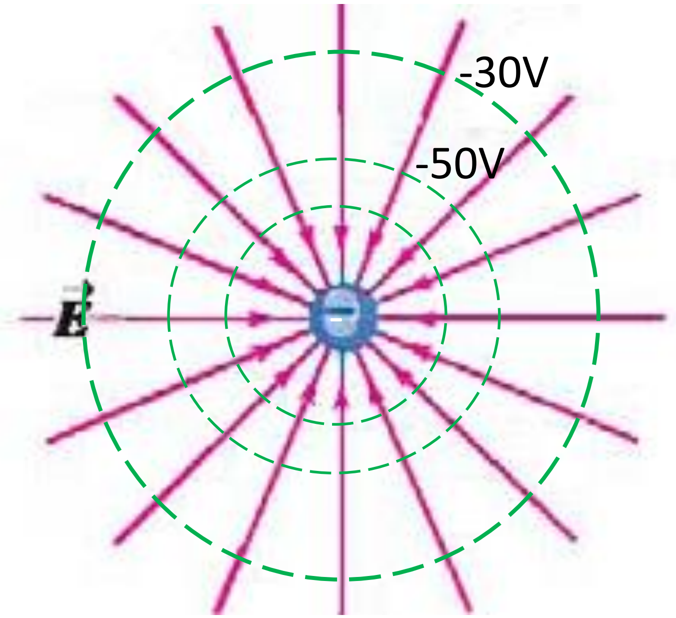
$$\Rightarrow \vec{E}\ perpendicular\ a\ d\vec{l}$$

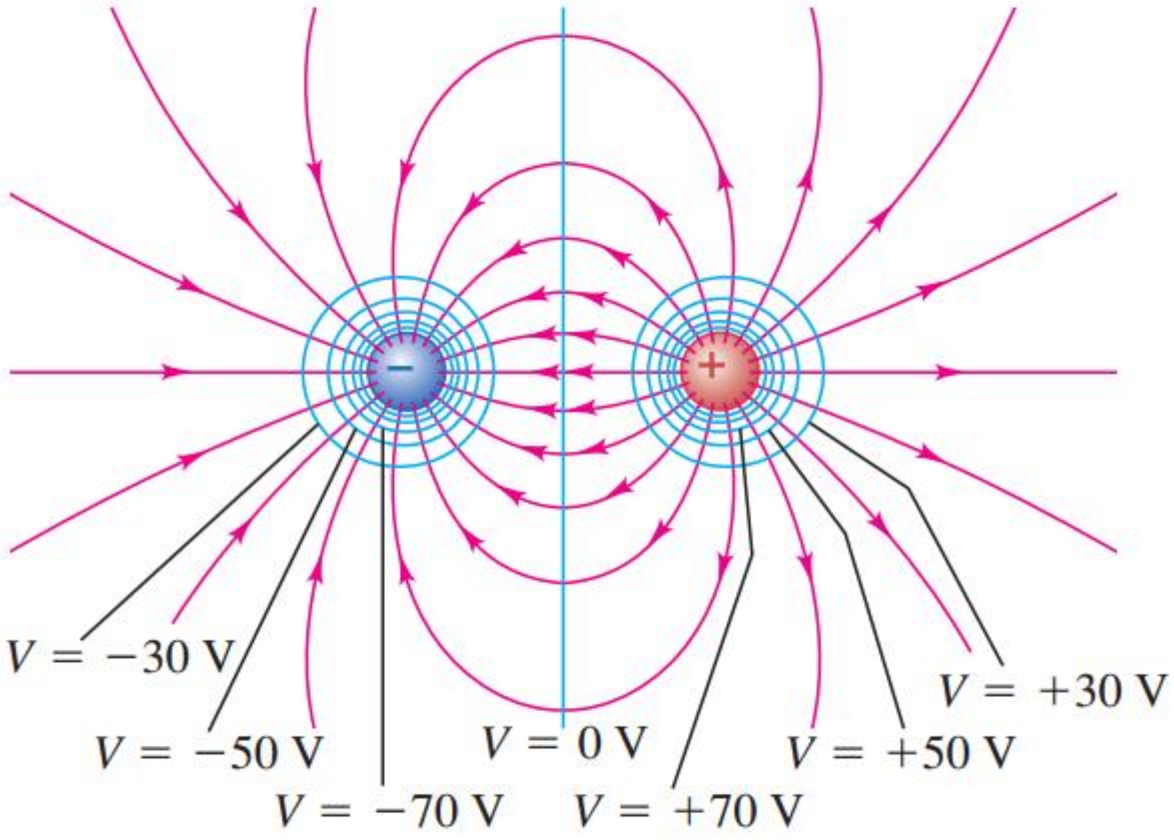
Curvas Equipotenciales son perpendicular a E

4) ***Curvas Equipotenciales no se tocan entre si***

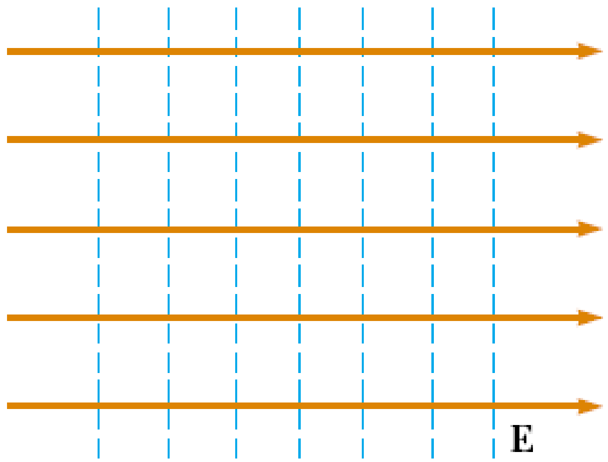
Curvas Equipotenciales : Curvas de nivel constante de las funciones potencial asociadas a un campo vectorial irrotacional. Son ortogonales a las líneas de campo.



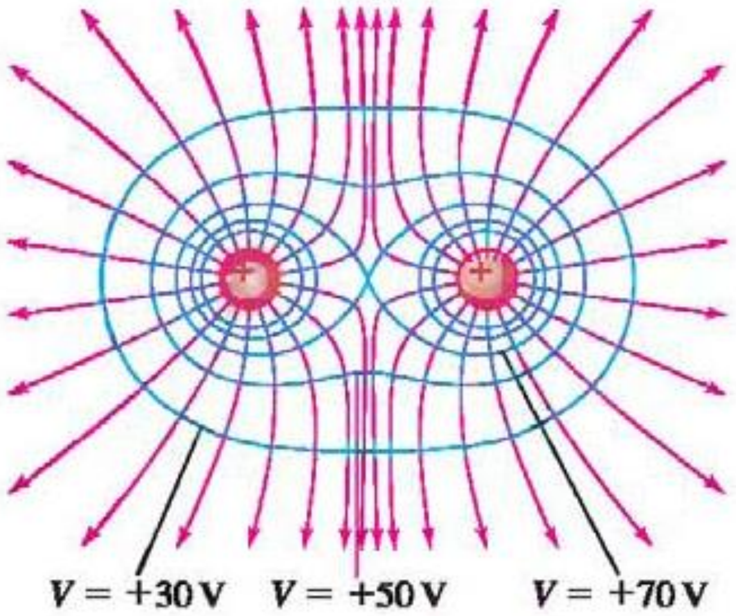




V = −30 V
V = −50 V
V = −70 V
V = 0 V
V = +70 V
V = +50 V
V = +30 V



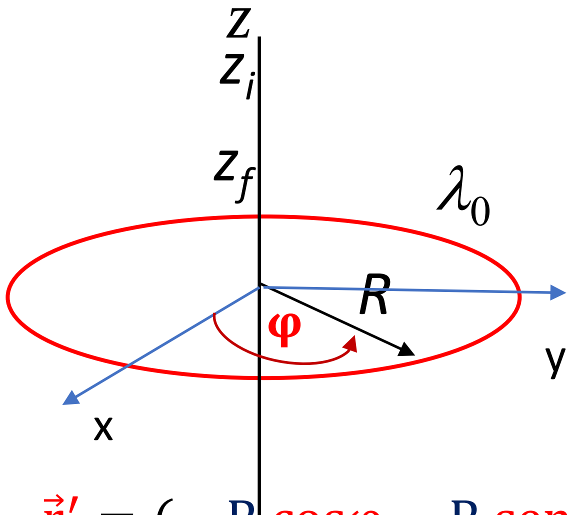
E



V = +30 V
V = +50 V
V = +70 V

Segundo ejemplo: no conocemos fácilmente el campo

Calcular la diferencia de potencial para puntos del eje *z* debida a una distribución lineal de densidad de carga uniforme λ_0 con forma de anillo de radio *R*



$$V(\vec{z}_f) - V(\vec{z}_i) = \int \frac{dq(r')}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{z}_f - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{z}_i - \vec{r}'|}\right]$$

$$\vec{r}_i = (0,0,z_i)$$

$$\vec{r}_f = (0,0,z_f)$$

$$\vec{r}' = (x', y', 0) = (R\cos\varphi, R\,\mathrm{sen}\varphi, 0)$$

$$\vec{z}_f - \vec{r}' = (-R\cos\varphi, -R\,\mathrm{sen}\varphi, z_f)$$

$$\vec{z}_i - \vec{r}' = (-R\cos\varphi, -R\,\mathrm{sen}\varphi, z_i)$$

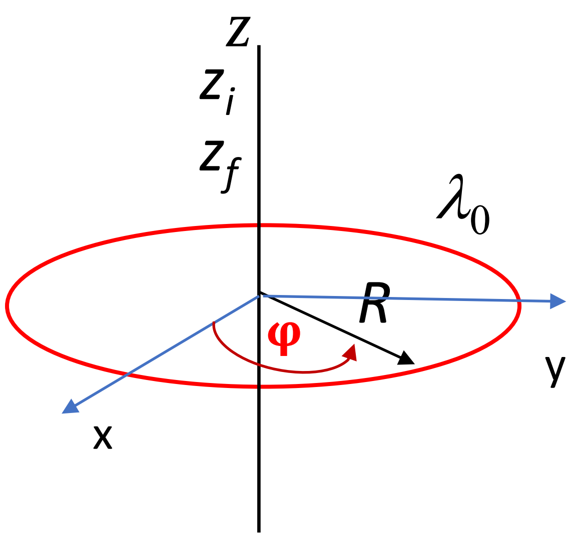
$$|\vec{z}_f - \vec{r}'| = \sqrt{(R\cos\varphi)^2 + (R\,\mathrm{sen}\varphi)^2 + {z_f}^2}$$

$$dq(r') = \lambda_0 R\, d\varphi'$$

$$|\vec{z}_i - \vec{r}'| = \sqrt{(R\cos\varphi)^2 + (R\,\mathrm{sen}\varphi)^2 + {z_i}^2}$$

$$V(\vec{z}_f) - V(\vec{z}_i) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 R\, d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2 + z_f^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(R^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\boxed{V(\vec{z}_f) - V(\vec{z}_i) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2 + z_f^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(R^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}$$



$$\boxed{V(\vec{z}_f) - V(\vec{z}_i) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2 + z_f^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(R^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}$$

Si $\quad z_i = \infty \longrightarrow V(\vec{z}_i) = 0$

$$V(\vec{z}_f) - V(\vec{z}_i = \infty) = V(z) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}(V)$$

$$\vec{E}(Z) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0}\frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

$$dq(r') = \lambda_0 R \, d\varphi'$$

$$Q = \lambda_0 R \, 2\pi$$

$$Z = \infty$$

$$\vec{E}(Z) = \frac{\lambda_0 R}{2\varepsilon_0}\frac{Z}{|z|^3}\hat{z}$$

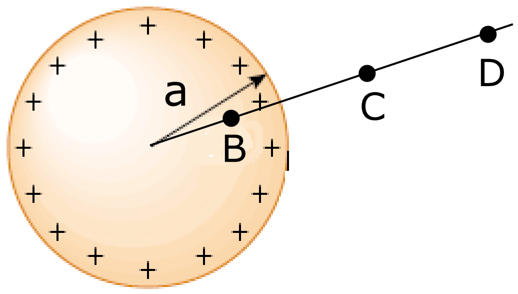
$$\vec{E}(Z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{|z|^3}\hat{z}$$

POTENCIAL ELECTRICO ESFERA UNIFORMEMENTE CARGADA EN SUPERFICIE

$$Q_{total} = \int \sigma dA = \sigma(4\pi a^2)$$

$$E(r < a) = 0$$

$$\vec{E}(r > a) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



$$\Delta V = V_D - V_C = -\int_{r_D}^{r_C} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{r_D}^{r_C} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}.\hat{r}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_D}\right)$$

$r_D \to \infty \qquad V(r_D \to \infty) = 0$

$$\boxed{V(\vec{r} \geq a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

$$V(r = a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

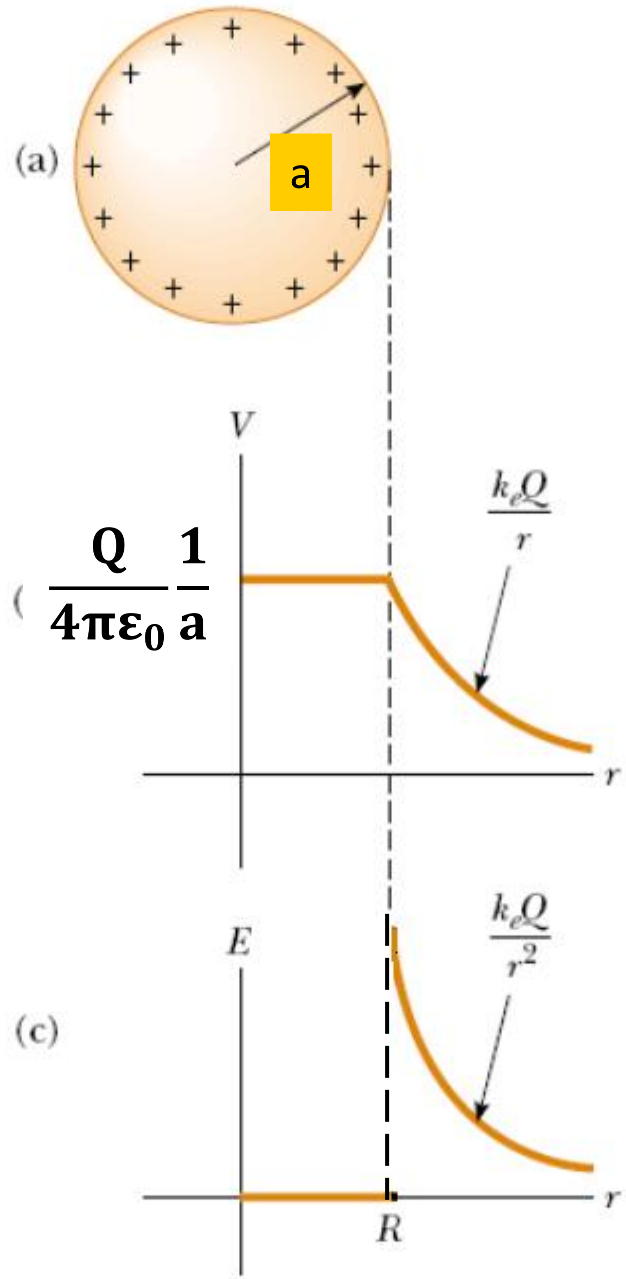
$$\Delta V = V_B - V(r = \infty) = -\int_{\infty}^{r_B} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}.d\vec{l} - \int_{a}^{r_B} \vec{E}.d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

=V(r=a)

E=0

$$\boxed{V(r \leq a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\mathbf{grad}(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))$$



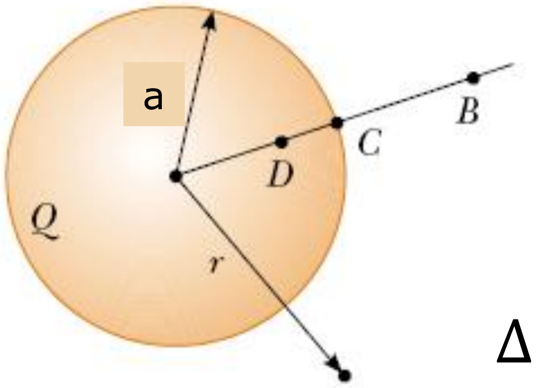
$$\boxed{V(\vec{r} \geq a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

$$\boxed{V(r \leq a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}}$$

La diferencia de potencial entre dos puntos cualquiera del espacio

$$V(r_1)\text{-}V(r_2) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) & si\ r_1\ y\ r_2\ > a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{a}\right) & si\ r_1\ > a\ y\ \ r_2\ \leq a \\ 0 & si\ r_1\ y\ r_2\ \leq a \end{cases}$$

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO ESFERA UNIFORMEMENTE CARGADA



$$E(r \geq a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad E(r \leq a) = \frac{Q\ \ r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$r_A \to \infty$ $\qquad$ $\mathbf{V(r_a \to \infty) = O}$

$$\boxed{V(\vec{r} \geq a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \qquad V(c) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

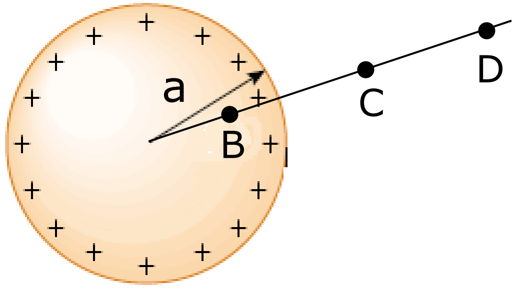
$$\Delta V = V_D - V_C = -\int_{r_C}^{r_D} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{r_C}^{r_D} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} dr == -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{(r^2 - a^2)}{2}$$

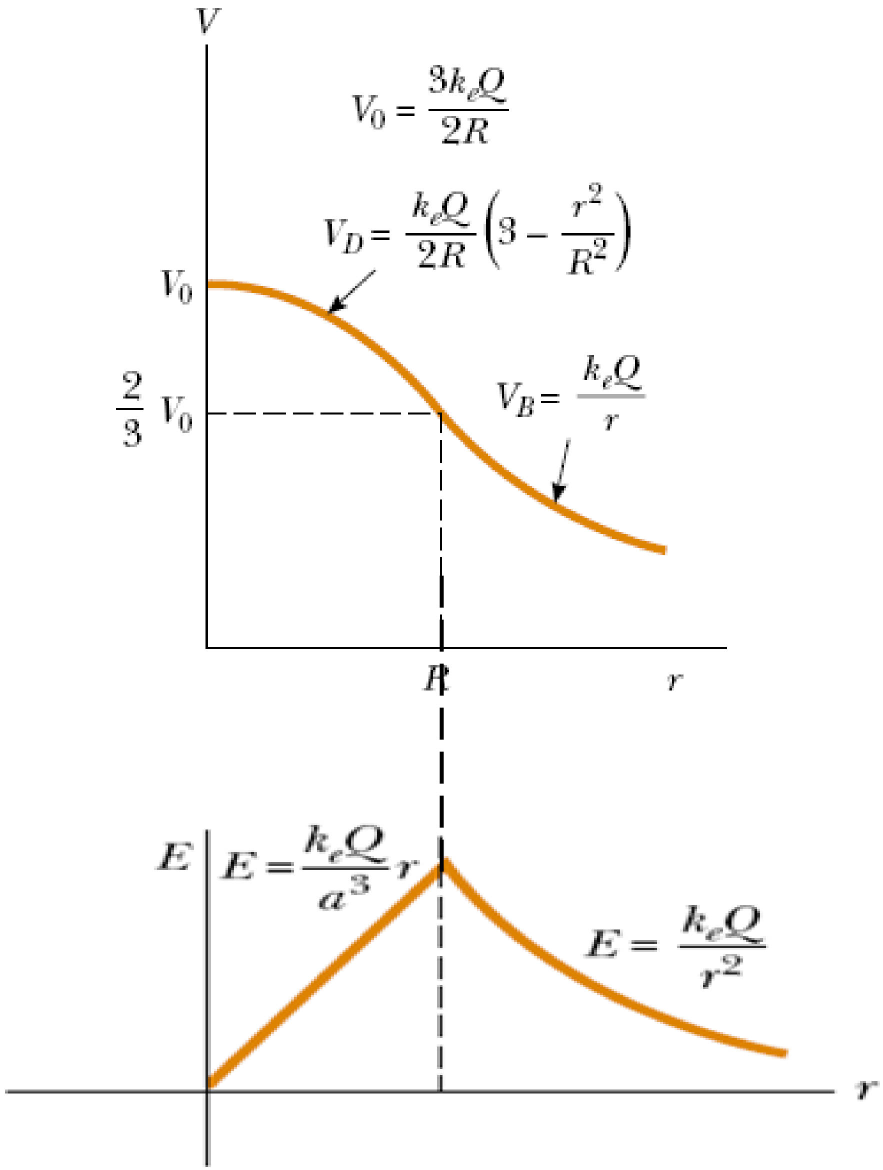
$$\boldsymbol{V_D = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{(r^2 - a^2)}{2} + V_C = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{(r^2 - a^2)}{2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}}$$

$$\boxed{V(r \leq a) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}(3a^2 - r^2)}$$

$$V(r \geq a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$V(r \leq a) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}(3a^2 - r^2)$$





R=a

Eligiendo una referencia

Vuelta al primer caso, diferencia de potencial para una carga puntual

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

Supongamos que $r_i \rightarrow \infty$ y que elegimos $V(r_i)=0$, queda

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Expresión práctica, pero peligrosa

Hemos elegido un lugar de referencia (en ∞) para una función potencial y le dimos un valor nulo a la función en ese punto. Para un conjunto discreto de *N* cargas sería:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} q_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

Y para una distribución continua:

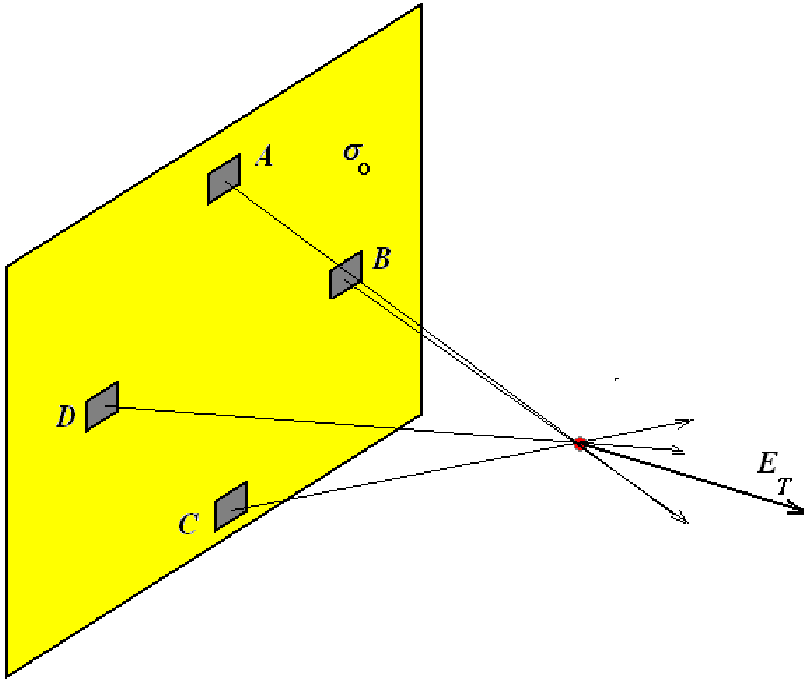
$$V(\vec{r}) = \int \frac{dq(r')}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Esta asignación es cómoda porque simplifica algunas expresiones, pero en otros casos nos da un gran susto.

CUANDO LA CANTIDAD DE CARGA ES INFINITA LA EXPRESIÓN ANTERIOR DIVERGE. ¡CUIDADO!

Primer ejemplo:

Conocemos fácilmente el campo: Plano infinito cargado superficialmente con una densidad de carga $\boldsymbol{\sigma_0}$. Tomamos z como eje normal al plano cargado.

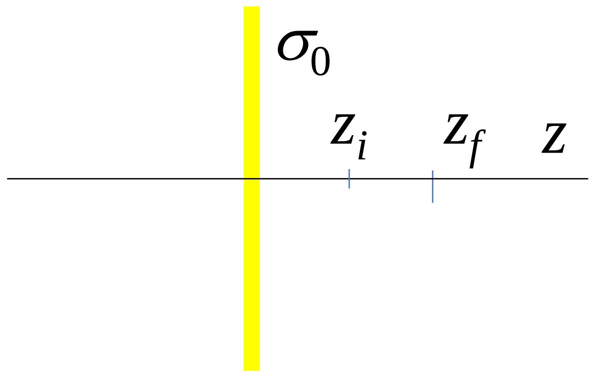


$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sgn}(z)\,\hat{z}$$

$$\vec{E}(z>0) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

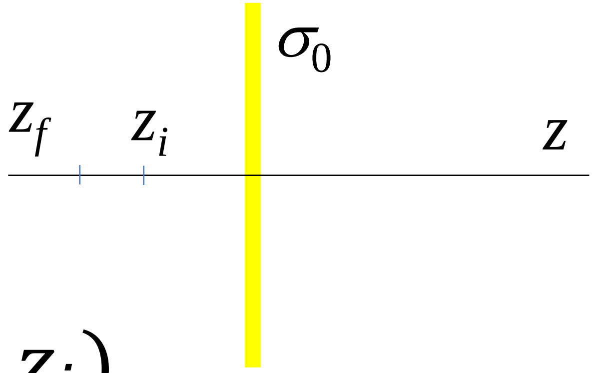
$$\vec{E}(z<0) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

Comencemos con posiciones del lado derecho



$$V(z_f) - V(z_i) = -\int_{z_i}^{z_f} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\,\widehat{z}\,.\,dz\,\hat{z} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(z_i\text{-}\,z_i)$$

Si están del lado izquierdo:



$$V(z_f) - V(z_i) = -\int_{z_i}^{z_f} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(-\widehat{z}\,).\,dz\,\hat{z} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(z_i\text{-}\,z_i)$$

¿Y si están de los dos lados? ¿Qué pasa si z_f=-z_i?